## 解答 I 微分積分

問 1

(1) $(x, y) = \left(\dfrac{2-a}{4-a}, \dfrac{1}{4-a}\right)$.

(2) (i) $0 < a < 4$ の時，$-2 < 0$ であるので，$(x, y) = \left(\dfrac{2-a}{4-a}, \dfrac{1}{4-a}\right)$ において，極大値 $f\left(\dfrac{2-a}{4-a}, \dfrac{1}{4-a}\right) = \dfrac{1}{4-a}$ を取る。

(ii) $a < 0$, $a > 4$ の時は極値を取らない。

問 2

(1) (a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{x}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{\pi}{12}$.

(b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x}}dx = \frac{\pi}{6}$.

(2) $a = \displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin t dt$ とすると，$a = -4 + 2a + \pi^2$ より，$a = -\pi^2 + 4$ となる。故に，

$$f(x) = x^2 - \pi^2 + 4.$$

(3) $I(a) = 2 - \dfrac{\log(1+e^{2a}) - \log 2}{a}$ となる。さらに，$\displaystyle\lim_{a\to 0} I(a) = 1$.

# 解答 II 線形代数

問 1　$5, 3, -2.$

問 2　(1) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ とおく。行列の積 $AB$, $BA$ をそれぞれ計算して Tr を計算すると,

$$\mathrm{Tr}(AB) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} + a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} = \mathrm{Tr}(BA)$$

となり示される。

(2) 対角化可能な $X$ の固有値が $\alpha, \beta, \gamma$ であるということは，ある正則行列 $P$ によって

$$P^{-1}XP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

と書けることに他ならない。両辺の Tr を取ると,

$$\mathrm{Tr}(P^{-1}XP) = \mathrm{Tr} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \alpha + \beta + \gamma$$

であるが, (1) の結果を用いて,

$$\mathrm{Tr}(X) = \mathrm{Tr}((XP)P^{-1}) = \mathrm{Tr}(P^{-1}XP) = \alpha + \beta + \gamma.$$

(3) 命題は偽である。例えば次の $A, B, C$ は反例を与える。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

問 3　(1) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$ とする。

(i) $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{v} \rangle = 0 + 0 = 0$ である。同じく，$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{w} \rangle = 0$ もわかる。ゆえに $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in U$。

(ii) また，$\langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = \lambda 0 = 0$。同じく，$\langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle = 0$ もわかる。ゆえに $\lambda\mathbf{x} \in U$。

以上より，$U$ は部分空間である。

(2) 例えば,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

(3)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (t, s \in \mathbb{R}).$$

# 解答 III 力学

問 1　$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta.$

問 2

$$\ddot{x} = \ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta - r\ddot{\theta}\sin\theta,$$

$$\ddot{y} = \ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta.$$

問 3

$$F_r = F_x\cos\theta + F_y\sin\theta,\ F_\theta = -F_x\sin\theta + F_y\cos\theta.$$

問 4　$F_x = m\ddot{x}, F_y = m\ddot{y}$，問 2 および問 3 の答え，$r$ 方向の中心力の大きさは $f(r)$，$\theta$ 方向の力はゼロであることを用いると以下が求められる。

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -f(r),\ F_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0.$$

問 5　$F_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = \dfrac{m}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0$ となる。よって，$r^2\dot{\theta} =$ 定数となる。

問 6　$r^2\dot{\theta} = h$ であることを用いて，

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = -h\frac{du}{d\theta}.$$

同様な考えで $\ddot{r}$ は以下のように得られる。

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right) = -h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right).$$

問 7　$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -f(r)$ に，問 4 と問 6 の結果を代入すると以下が得られる。

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = m\left(-h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right) - u^3h^2\right) = -f(r) = m\mu u^2.$$

よって両辺を，$-mh^2u^2$ で割ることで式 (2) が得られる。

問 8　同次方程式の特解を考えると，$u = A\cos\theta + B\sin\theta + \frac{\mu}{h^2}$ となる。$\theta = 0$ で $r$ が極小値をとることから，$u = A\cos\theta + \frac{\mu}{h^2} = \frac{1}{r}$ となる。よって以下が得られる。

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + \frac{h^2}{\mu}A\cos\theta}.$$

式 (1) と比べて，$C_1 = \frac{h^2}{\mu}, C_2 = A\frac{h^2}{\mu}.$

## 解答 IV 電磁気学

問 1 $\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

問 2 $\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{(x, y, 0)}{x^2+y^2}$

問 3 (i) 0
(ii) $\dfrac{a\sigma}{\varepsilon_0 r}$
(iii) 0

問 4 $\dfrac{a\sigma}{\varepsilon_0}\ln\dfrac{b}{a}$

問 5 $\dfrac{\pi}{\varepsilon_0}(a\sigma)^2\ln\dfrac{b}{a}$

問 6 円筒内側側面の電荷密度は $-\dfrac{a}{b}\sigma$
円筒外側側面の電荷密度は 0

問 7 $\dfrac{\kappa-1}{\kappa}\dfrac{a}{b}\sigma$

## 解答 V プログラミング

以下に Fortran90 によるプログラム例を示す。

```
program main

implicit none
integer(4) :: i, n
real(8) :: a, b, x, y, avex, avey, avex2, avexy

n = 100

avex = 0.0d0
avey = 0.0d0
avex2 = 0.0d0
avexy = 0.0d0
do i=1,n
  read(*,*) x,y
  avex = avex + x
  avey = avey + y
  avex2 = avex2 + x*x
  avexy = avexy + x*y
end do
avex = avex / dble(n)
avey = avey / dble(n)
avex2 = avex2 / dble(n)
avexy = avexy / dble(n)

if(avex2 /= avex*avex) then
  a = avexy - avex * avey
  a = a / (avex2 - avex*avex)
  b = avex2 * avey - avex * avexy
  b = b / (avex2 - avex*avex)

  write(*,*) a, b
end if

stop
end
```