令和５年度

金沢大学理工学域編入学試験

数物科学類

専門科目

（注　意）

1. 問題紙は指示のあるまで開かないこと。
2. 問題紙は本文５ページであり、答案用紙は２枚、下書き用紙は１枚である。
3. ５つの問題（I 微分積分，II 線形代数，III 力学，IV 電磁気学，V プログラミング）から２つを選択して解答し，選択した問題番号を答案用紙の所定欄に記入すること。答えはすべて答案用紙の指定のところに記入すること。下書き用紙への記入は答案として認めない。
4. １問につき１枚の答案用紙で解答すること。必要なら答案用紙の裏を使ってもよい。ただし，この場合は裏に続けることを明記し，裏面の上部（表の横線の上に相当する部分）は使用しないこと。
5. 白紙の答案用紙も受験番号等を記入して提出すること。
6. 問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

I 微分積分

次の問１と問２に答えよ。

問１ 関数 $f(x,y) = x^4 - xy + y^4$ について，次の問いに答えよ。

(1) グラフ $z = f(x,y)$ 上の点 $(0,0,0)$ 及び，$(1,2,15)$ における接平面の方程式をそれぞれ求めよ。

(2) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ かつ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ となる (x,y) を全て求めよ。

(3) (2) で求めた各点において，f が極大値・極小値をとるか，またはどちらでもないか，を調べよ。

問２ 次の問いに答えよ。

(1) 次の定積分を求めよ。

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1}dx$　　(b) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{1+a\cos x}dx \quad (0 < a < 1)$

(2) 次の広義積分の収束・発散を調べ，収束する場合はその値を求めよ。

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx \quad (p > 0)$　　(b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^q}\,dx \quad (q > 0)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{n}{(2n)^2}\right)$ を求めよ。

II 線形代数

次の問１と問２に答えよ。

問１ 次の問いに答えよ。

(1) 3×3 行列 A を，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。A の固有値とその固有ベクトルを求めよ。

(2) $\mathbb{R}^3$ を３次元列ベクトルのなすベクトル空間とし，$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ を，その基底の１つとする。B を 3×3 行列で，

$$B\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1, \quad B\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \quad B\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3,$$

を満たすものとする。B の固有値とその固有ベクトルを求めよ。

問２ 4×4 行列 A を，$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ とし，線形写像 $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を，$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ で定める。次の問いに答えよ。

(1) A の階数 $\mathrm{rank} A$ を求めよ。

(2) f の像 $\mathrm{Im}(f)$ の基底を１組求めよ。

(3) 2×4 行列 B で，$\mathrm{rank} B = 2$ かつ $BA = O$（O は 2×4 零行列）となる B を１つ求めよ。

III 力学

ばね定数 $k(>0)$ のばねの一端を固定し，他端に質量 m の物体をとりつけて水平な床の上に置いた。物体は質点とみなすことができる。ばねの長さ方向を x 軸とし，物体は x 軸上を運動する。また，ばねが自然長のときの物体の位置を $x=0$ とする。時刻 $t=0$ にばねを自然長から $x_0(>0)$ だけ伸ばし，静かに離した。このとき，物体は単振動を始めた。ばね及び物体に働く摩擦力は無視できるとして，以下の問いに答えよ。

問 1 単振動の角振動数 ω_0 を求めよ。ω_0 を問 2 以降の解答に用いてよい。

問 2 物体の変位 x を時間 t の関数として求めよ。

問 3 物体の速度 v を時間 t の関数として求めよ。

問 4 物体の力学的エネルギーを計算し，保存することを示せ。

次に上述の物体に速度に比例する摩擦力 f が働く場合を考える。摩擦力は正の定数 γ を用いて以下のように表せる。

$$f = -m\gamma\frac{dx}{dt}.$$

時刻 $t=0$ にばねを自然長から $x_0(>0)$ だけ伸ばし，静かに離した。ばねと床の間の摩擦力は無視できるとする。$\gamma < 2\sqrt{\frac{k}{m}}$ とし，以下の問いに答えよ。

問 5 物体が従う運動方程式を書け。

問 6 物体が従う運動方程式の一般解を任意定数 A, B を用いて次のように書くことができる。

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left\{A\sin\Omega t + B\cos\Omega t\right\}.$$

λ と Ω を求めよ。

問 7 初期条件を用いて，定数 A と B を定めよ。解答に λ と Ω を用いてよい。

IV 電磁気学

点電荷 q が，x 軸上の点 $(a,0,0)$ に置かれている $(q>0, a>0)$。以下の問いに答えよ。ただし，真空の誘電率は ε_0 と表す。

問 1 点 $\mathrm{P}(x,y,0)$ における電場 $\boldsymbol{E}$ の大きさ E を求めよ。

問 2 点 $\mathrm{P}(x,y,0)$ における電場 $\boldsymbol{E}$ の x,y,z 成分 E_x, E_y, E_z を求めよ。

問 3 単位電荷を無限遠点から点 $\mathrm{P}(x,y,0)$ まで運ぶために要する仕事を求めよ。

さらに点電荷 $-q$ を x 軸上の点 $(-a,0,0)$ に置いた。

問 4 点 $\mathrm{P}(x,y,0)$ における電位 V を求めよ。ただし，無限遠点での電位を 0 とする。

問 5 点 $\mathrm{P}(x,y,0)$ が原点から十分離れているとき，電位 V は，

$$V = \frac{px}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

と表せる。ここで $r=\sqrt{x^2+y^2}$ で，$a \ll r$ である。p を求めよ。必要に応じて以下の近似式を用いてよい。

$$\frac{1}{\sqrt{1\pm\alpha}} \simeq 1 \mp \frac{\alpha}{2}, \qquad \alpha \ll 1$$

問 6 点 $\mathrm{P}(x,y,0)$ が原点から十分離れているときの電場 $\boldsymbol{E}$ を求めよ。解答に p を用いてよい。

V プログラミング

連続関数 $f(x)$ に対し，方程式 $f(x)=0$ の数値解を求める方法を考える。$x_1<x_2$ とし，$f(x_1)f(x_2)<0$ であることから，区間 (x_1,x_2) に解が少なくとも一つあることがわかっている場合，その解の存在範囲を逐次半分にすることにより目的とする精度の数値解を求めることができる。その手順は次のようにまとめられる。

(a) $f(x_1)f(x_2)<0$ である２点 x_1,x_2 を設定する $(x_1<x_2)$。x_1 は解の存在範囲の左端，x_2 はその右端である。

(b) ２点の中点 $x_{\mathrm{m}}=(x_1+x_2)/2$ における関数値 $f(x_{\mathrm{m}})$ を計算し，$|f(x_{\mathrm{m}})|$ が十分小さく終了条件を満たしていれば，x_{m} を数値解として出力し，終了する。さもなくば，(c) に進む。

(c) $f(x_{\mathrm{m}})$ の符号が左端 x_1 における関数値 $f(x_1)$ と同符号であれば，この中点を新たに範囲の左端 x_1 とする。逆に左端における関数値と異なる符号を持てば，この中点を新たに範囲の右端 x_2 とする。その後，(b) に戻る。

関数 $f(x)=x^2-4x+1$ は，$f(x)=0$ の解が $x=0$ と２の間に一つある。その解を上述の方法により求めるプログラムをＣ言語もしくは Fortran を用いて書け。なお，中点における関数値の絶対値が 10^{-5} 以下となることを終了条件とし，その時の x_{m} を数値解として標準出力へ出力すること。