令和４年度

金沢大学理工学域編入学試験

数物科学類　計算科学コース

専門科目

（注　意）

1. 問題紙は指示のあるまで開かないこと。
2. 問題紙は本文５ページであり，答案用紙は２枚，下書き用紙は１枚である。
3. ５つの問題（I 微分積分，II 線形代数，III 力学，IV 電磁気学，V プログラミング）から２つを選択して解答し，選択した問題番号を答案用紙の所定欄に記入すること。下書き用紙への記入は答案として認めない。
4. １問につき１枚の答案用紙で解答すること。必要なら答案用紙の裏を使ってもよい。ただし，この場合は裏に続けることを明記し，裏面の上部（表の横線の上に相当する部分）は使用しないこと。
5. 白紙の答案用紙も受験番号等を記入して提出すること。
6. 問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

I　微分積分

次の問１と問２に答えよ。

問１ 以下の問いに答えよ。

(1) $\alpha > 1$ のとき，関数 $f(x) = (x + |x|)^{\alpha}$ は $\mathbf{R}$ 上の C^1 級関数であることを証明せよ。

(2) 集合 $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{1}{4}(x + |x|)^2 + y^2 \leq 1, x \geq -2\}$ の面積を求めよ。

(3) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\cos(\sqrt{x}) - 1 + \sin(\frac{x}{2})}{\sin(x^2)}$$

問２ $\mathbf{R}^2$ の領域を次で定義する。

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \middle| \ |x| < \tfrac{\pi}{2},\ |y| < \cos^2 x \right\}.$$

以下の問いに答えよ。

(1) D の概形を図示せよ。

(2) 関数 $g(x, y) = \frac{1}{(y-2)\cos x}$ は，D 上の連続関数であることを示せ。

(3) 広義積分

$$\iint_D \frac{x^2 y^2}{\cos^6 x}\, dxdy$$

の値を求めよ。

II　線形代数

次の問1と問2に答えよ。

問1 次の命題の真偽を判定し，命題が真の場合は証明を与え，命題が偽の場合は反例あるいはその判断理由を述べよ。

(1) V を $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間とし，m 個の元 $e_1, \ldots, e_m \in V$ は $\mathbf{R}$ 上1次独立とする。ベクトル $v \in V$ が $e_1, \ldots, e_m$ の $\mathbf{R}$ 上の1次結合であるとき，$v = c_1 e_1 + \cdots + c_m e_m$ を満たす実数の組 $(c_1, \ldots, c_m)$ はただ一通りに定まる。

(2) 2×2 行列 A, B について，$\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ が成立する。

(3) $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間 $\mathbf{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbf{R} \right\}$ に対し，写像 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y \\ x - 2y + 1 \end{pmatrix}$$

で定めると，f は線形写像である。

(4) n を任意の自然数とする。正則な $n \times n$ 行列は，固有値0を持たない。

問2 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ。

(1) 固有値を全て求めよ。

(2) A を直交行列によって対角化せよ。

令和4年度　金沢大学理工学域　編入学試験 問 題 用 紙		
学類名	数物科学類（計算科学コース）（一般選抜）	
試験科目名	専門科目	P.　3　/　5

III　力学

質量 m をもつ質点 A，B が，ばね定数 k および自然長 ℓ のばねでつながれている。ただし，ばねの質量は無視できるとし，ばねは二つの質点を通る直線上にある。それぞれの位置ベクトルは $\boldsymbol{r}_\mathrm{A}$，$\boldsymbol{r}_\mathrm{B}$ とする。また，時間 t による微分を $\dot{\boldsymbol{r}}_\mathrm{A} = \dfrac{d\boldsymbol{r}_\mathrm{A}}{dt}$ などのように で表す。考えている系のラグランジアン L は運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー V を用いて $L = T - V$ で与えられる。以下の問いに答えよ。

問 1 系の運動エネルギー T を求めよ。

問 2 系のポテンシャルエネルギー V を求めよ。

二点の重心を表す位置ベクトルを $\boldsymbol{R}$，相対ベクトルを $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_\mathrm{B} - \boldsymbol{r}_\mathrm{A}$ とする。

問 3 $\boldsymbol{r}_\mathrm{A}$，$\boldsymbol{r}_\mathrm{B}$ を $\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{r}$ を用いて表せ。

問 4 $\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{r}$，$\dot{\boldsymbol{R}}$，$\dot{r}$ を変数とする系のラグランジアン L を表せ。

重心と相対距離に対するオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{R}} - \frac{\partial L}{\partial R} = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

で与えられる。ただし，$R = |\boldsymbol{R}|$，$r = |\boldsymbol{r}|$ とする。

問 5 オイラー・ラグランジュ方程式を具体的に計算し，R，r に対する運動方程式を求めよ。

問 6 時刻 $t = 0$ の初期値として，$r = \ell$，$\dot{r} = v_0$（v_0 は定数）の場合の，r の運動を求めよ。

IV 電磁気学

同形同面積で厚さの無視できる導体平板 A と B による平行板コンデンサーを考える。図 1 に示すように，平板 A と B を真空中に距離 d だけ離して平行に固定し，平板間に電圧 V を印加した。コンデンサーは充電済みであり，真空の誘電率を ε_0，平板の面積を S，コンデンサーの端の効果は無視して以下の問いに答えよ。

問 1 コンデンサーの電気容量を求めよ。

問 2 コンデンサーに蓄えられているエネルギーを求めよ。

問 3 それぞれの導体平板を固定するために必要な力の大きさを求めよ。

図 2 に示すように，充電が完了した状態で外部電圧を取り外した後に，平板間に誘電体を挿入すると，コンデンサーに平行な誘電体の表面に分極電荷が誘起した。誘電体は平板と同形同面積で厚さは $\ell(< d)$ であり，平板と平行かつはみ出さないように挿入している。ここで，分極電荷が誘電体内部につくる電場は，誘電体内部の電場 $\vec{E}$ に比例し $-\alpha\vec{E}$ である (α は正の定数)。

問 4 誘電体内部の電場の大きさは，誘電体を挿入する前の何倍になったかを求めよ。

問 5 導体平板 A 側の誘電体表面に誘起される分極電荷を求めよ。

問 6 コンデンサーの電気容量を求めよ。

問 7 平板間距離を縮めて ℓ とし，平板間は完全に誘電体で占められている場合を考える。それぞれの導体平板を固定するために必要な力の大きさを求めよ。

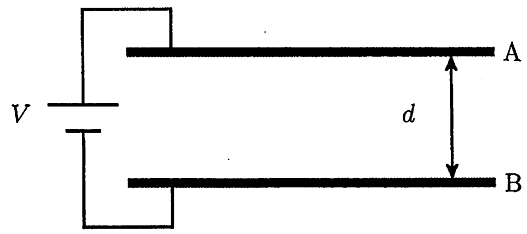

図 1

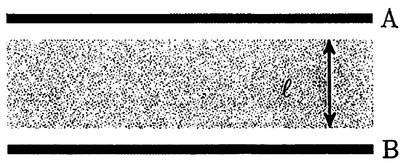

図 2

令和４年度　金沢大学理工学域　編入学試験 問　題　用　紙		
学類名	数物科学類（計算科学コース）（一般選抜）	
試験科目名	専門科目	

V　プログラミング

x 軸上の原点に 1 つ粒子があり，1 回の移動で，確率 $\frac{1}{2}$ で正の方向または負の方向へ，1 だけ移動し，10 回移動する運動を考える。この粒子が 10 回移動した後に原点に戻る確率 P は，原点から 10 回移動する運動を 100 万回繰り返し，10 回移動した後に原点に戻った回数を N として $P = \frac{N}{1000000}$ で近似できる。この近似アルゴリズムを用いて，原点に戻る確率 P を標準出力に書き出すプログラムを，Fortran もしくは C 言語で作成せよ。ただし，0 以上 1 未満の一様乱数を生成する関数 random() が与えられているとし，それを用いてもよい。