解答 I 微分積分

問 1

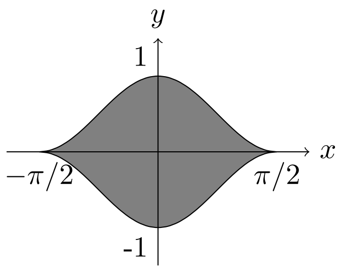
(1) $x \geq 0$ のとき，$f(x) = (2x)^\alpha$ で，$x < 0$ のとき，$f(x) = 0$ である。$f(x)$ が $x \neq 0$ で C^1 級であることは，これより明らかである。一方，$\lim_{x\to 0+} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0-} f(x)$ であるので，$f(x)$ は $x = 0$ でも連続である。次に，$f(x)$ の導関数を計算すると，$f'(x) = 2\alpha(2x)^{\alpha-1}$ $(x > 0)$，および $f'(0) = 0$ $(x < 0)$ であり，$x = 0$ では，$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{x} = (2x)^\alpha/x = 0 = \lim_{x\to 0-} \frac{f(x)}{x}$ より，$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ である。これより，$f'(x)$ が $x \in \mathbf{R}$ で連続であることが従う。よって，$f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上で C^1 級である。

(2) $x < 0$ のとき，$x + |x| = 0$ なので，$((x, y) \in D,\ x < 0) \Leftrightarrow (-2 \leq x < 0,\ -1 \leq y \leq 1)$ となり，これは辺の長さ 2 の正方形を表す。よって，$x < 0$ における D の面積は 4 である。一方，$x \geq 0$ のとき，$x + |x| = 2x$ なので，$((x, y) \in D,\ x \geq 0) \Leftrightarrow (x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0)$ となり，これは半径 1 の半円を表す。よって，$x \geq 0$ における D の面積は $\pi/2$ である。これより，D の面積は $4 + \pi/2$ である。

(3) マクローリン級数 $\cos(x) = 1-x^2/2+x^4/24-\cdots$，および $\sin(x) = x-x^3/6+\cdots$ を使用すると，$x > 0$ において，$\cos(\sqrt{x})-1+\sin(x/2) = 1-x/2+x^2/24+\cdots-1+x/2-x^3/48+\cdots = x^2/24+\cdots$ である。一方，$\sin(x^2) = x^2 - \cdots$ なので，$\lim_{x\to 0+} \frac{\cos(\sqrt{x})-1+\sin(x/2)}{\sin(x^2)} = \frac{1}{24}$ が従う。

問 2

(1) D の概形は次のようになる（境界は含まない）。



(2) $(x, y) \in D$ のとき，$y < 1,\ \cos x \neq 0$ なので，$\frac{1}{y-2}$ と $\frac{1}{\cos x}$ はともに D 上で連続である。よって，$g(x, y)$ も D 上で連続である。

(3) 自然数 n に対し，$D_n = D \cap \{(x, y) : |x| < \pi/2 - 1/n\}$ とおく。$\frac{x^2y^2}{\cos^6 x}$ は有界閉集合 $\overline{D_n}$ 上で連続かつ有界である。よって，D_n 上の重積分が存在し，

$$\begin{aligned}\iint_{D_n} \frac{x^2y^2}{\cos^6 x}\, dxdy &= 4\int_0^{\pi/2-1/n} \frac{x^2}{\cos^6 x}(\int_0^{\cos^2 x} y^2\, dy)\, dx \\ &= 4\int_0^{\pi/2-1/n} \frac{x^2}{\cos^6 x}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\cos^2 x} dx = 4\int_0^{\pi/2-1/n} \frac{x^2}{\cos^6 x}\frac{\cos^6 x}{3}\, dx \\ &= \frac{4}{3}\int_0^{\pi/2-1/n} x^2\, dx = \frac{4}{9}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right)^3.\end{aligned}$$

ここで，極限 $n \to \infty$ をとると，次のように D 上の広義積分が存在しその値が求まる。

$$\int_D \frac{x^2y^2}{\cos^6 x}\, dx\, dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \frac{x^2y^2}{\cos^6 x}\, dxdy = \frac{\pi^3}{18}.$$

解答 II 線形代数

問 1

(1) 真:（証明）$v = c_1e_1 + \cdots + c_me_m = d_1e_1 + \cdots + d_me_m$ と書けたとすると，$(c_1 - d_1)e_1 + \cdots + (c_m - d_m)e_m = 0$ となるので，1 次独立性より、$c_1 - d_1 = c_2 - d_2 = \cdots = c_m - d_m = 0$ となる。（証明終）

(2) 偽 : O_2, I_2 を，それぞれ，2 次の零行列および単位行列とする。例えば，$A = I_2$, $B = -I_2$ とおくと，$\det(I_2 + (-I_2)) = \det(O_2) = 0 \neq 2 = \det(I_2) + \det(-I_2)$ より，反例が得られる。

(3) 偽: 例えば

$$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

となるので，f は線形写像ではない。

(4) 真 :（証明）背理法による。A は $n \times n$ の正則行列で，固有値 0 を持つと仮定する。このとき，その固有ベクトルとなる実 n 次元列ベクトル $v\ (\neq \mathbf{0})$ が存在し，$Av = 0v = \mathbf{0}$ である。（ただし $\mathbf{0}$ はすべての成分が 0 の n 次元列ベクトル。）両辺に左から A^{-1} をかけると，$v = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$ となり矛盾する。よって仮定は誤りである。（証明終）

問 2

(1) 固有値は，$1, -2, 3$ である。

(2) それぞれの固有値に対応する固有ベクトルとして，例えば，$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ がとれる。そこで，これらを正規化したベクトルを並べて，

$$P = \begin{pmatrix}1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2}\\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0\\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

とすれば，P は直交行列で，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1 & & \\ & -2 & \\ & & 3\end{pmatrix}$$

を満たす。

解答 III 力学

問 1 運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}m(|\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{A}}|^2 + |\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{B}}|^2)$$

とかける。
問 2 ポテンシャルエネルギーは

$$V = \frac{1}{2}k(|\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}| - \ell)^2$$

とかける。
問 3 $\boldsymbol{R} = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}} + \boldsymbol{r}_{\mathrm{B}})$，$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}$ より，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{\mathrm{A}} &= \boldsymbol{R} - \frac{1}{2}\boldsymbol{r}, \\ \boldsymbol{r}_{\mathrm{B}} &= \boldsymbol{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{r} \end{aligned}$$

が得られる。
問 4 問 3 の答を，問 1 と問 2 の答に代入して，

$$L = m|\dot{\boldsymbol{R}}|^2 + \frac{1}{4}m|\dot{\boldsymbol{r}}|^2 - \frac{1}{2}k(|\boldsymbol{r}| - \ell)^2$$

が得られる。
問 5 問 4 で得られたラグランジアンをオイラー・ラグランジュ方程式に代入して計算すると，

$$\begin{aligned} m\ddot{R} &= 0, \\ \frac{1}{2}m\ddot{r} &= -k(r - \ell) \end{aligned}$$

が得られる。
問 6 $x = r - \ell$ とおくと，

$$\frac{1}{2}m\ddot{x} = -kx$$

なので，$x = A\cos\sqrt{\dfrac{2k}{m}}t + B\sin\sqrt{\dfrac{2k}{m}}t$ とかける。初期条件より，$A = 0$，$B = v_0\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$ が得られるので，

$$r = v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \ell$$

となる。

解答 IV 電磁気学

問 1 導体平板 A に蓄えられた電荷を Q，B に蓄えられた電荷を $-Q$ とすると，ガウスの法則より，コンデンサー間の電場の大きさ $E_0 = \dfrac{V}{d} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}$ である。電気容量を C とすると，$Q = CV$ より，$C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$.

問 2 コンデンサーに蓄えられるエネルギーは $\dfrac{CV^2}{2} = \dfrac{\varepsilon_0 S V^2}{2d}$.

問 3 導体平板を固定するために必要な力の大きさは $\dfrac{QE_0}{2} = \dfrac{\varepsilon_0 S V^2}{2d^2}$.

問 4 誘電体内部の電場の大きさ E は，$E_0 - \alpha E = E$ より，E_0 の $\dfrac{1}{1+\alpha}$ 倍。

問 5 A 側の誘電体表面に表われる分極電荷を σ とすると，$E = \dfrac{Q+\sigma}{\varepsilon_0 S}$ より，
$\sigma = -\dfrac{\alpha Q}{1+\alpha} = -\dfrac{\alpha\varepsilon_0 SV}{d(1+\alpha)}$.

問 6 問 4 より，平板間の電位差 $V' = \left(d - \ell + \dfrac{\ell}{1+\alpha}\right)\dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}$ なので，電気容量を C' とすると，$Q = C'V'$ より，$C' = \dfrac{\varepsilon_0(1+\alpha)S}{\ell + (1+\alpha)(d-\ell)}$.

問 7 問 4 より，導体平板を固定するために必要な力の大きさは $\dfrac{QE_0}{2(1+\alpha)} = \dfrac{\varepsilon_0 S V^2}{2d^2(1+\alpha)}$.

解答 V プログラミング

解答例として，Fortran によるプログラムの例を挙げる。

```
integer x,p,np
double precision r
np=1000000
p=0
do j=1,np
x=0
do i=1,10
r=random()
if(r.lt.0.5) then
 x=x+1
else
 x=x-1
endif
enddo
if(x.eq.0) p=p+1
enddo
write(*,*)'P=',dble(p)/dble(np)
end
```