令和４年度 編入学試験　数物科学類 物理学コース 専門科目解答例 (略解)

I.

問 1. $\rho = \dfrac{M}{\pi a^2 D}$

問 2. エネルギーの保存則より $MgL\sin\theta = \dfrac{1}{2}MV^2$

よって $V = \sqrt{2gL\sin\theta}$

問 3. $V = a\omega$

問 4. 例えば円筒座標を用いて $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^D dz \int_0^a r dr \rho r^2 = 2\pi D\rho\frac{a^4}{4} = \frac{Ma^2}{2}$

問 5. エネルギーの保存則と問 3，問 4 より $MgL\sin\theta = \dfrac{1}{2}MV^2 + \dfrac{1}{2}I\omega^2 = \dfrac{3}{4}MV^2$

よって $V = \sqrt{\dfrac{4}{3}gL\sin\theta}$

慣性モーメント I を用いた場合は，エネルギーの保存則と問3より $MgL\sin\theta = \dfrac{1}{2}\left(M + \dfrac{I}{a^2}\right)V^2$

よって $V = \sqrt{\dfrac{2MgL\sin\theta}{M + I/a^2}}$

問 6. 重心の運動が静止状態からの等加速度運動であることを利用すると，加速度を α として $\dfrac{1}{2}MV^2 = M\alpha L$ が成り立つ。これと前問より

$\alpha = \dfrac{2}{3}g\sin\theta$

I を用いた場合も同様にして

$\alpha = \dfrac{Mg\sin\theta}{M + I/a^2}$

II.

問 1. $\dfrac{Q}{2\pi a}$

問 2. $\dfrac{Q d\theta}{2\pi}$

問 3. 電場の各成分は

$$x \text{ 成分} = \frac{Q d\theta}{8\pi^2 \varepsilon_0} \frac{-a}{(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

$$y \text{ 成分} = 0$$

$$z \text{ 成分} = \frac{Q d\theta}{8\pi^2 \varepsilon_0} \frac{b}{(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

問 4. 電場の x, y 成分は対称性からゼロになるので，z 成分だけを考えて θ を 0 から 2π まで積分すると

$$\text{電場の大きさ} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{b}{(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

電場の方向：$+z$ 方向

問 5. 前問で $b \gg a$ とすれば

$$\text{電場の大きさ} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 b^2}$$

III.

問 1.　(1)　$y = \tan^{-1} x$ とすると $f'(x) = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+x^2}$

(2)　$f'(x) = \dfrac{1}{\log x}(\log x)' = \dfrac{1}{x \log x}$

問 2.　一般解は，c_1, c_2 を定数として

$$y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \frac{1}{5}x + \frac{4}{25}$$

問 3.　(1)　$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = \dfrac{\partial}{\partial x}x^2 + \dfrac{\partial}{\partial y}y^2 + \dfrac{\partial}{\partial z}1 = 2x + 2y$

(2)　ガウスの定理と前問より

$$\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} dS = \iiint_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} dV = \iiint_V (2x + 2y) dV = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz (2x + 2y) = 2$$

問 4.　(1)　A の固有方程式は $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 8-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 4)^2(\lambda - 10) = 0$

したがって固有値は $\lambda = 4, 10$

(2)　A を対角化する直交行列 P として，例えば $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & -5/\sqrt{30} \end{pmatrix}$