令和４年度　金沢大学理工学域　編入学試験 解 答 例	
学類名	数物科学類（数学コース）（一般選抜）
試験科目名	専門科目　数学　　(P. 1 / 2)

採点においては解答のプロセスや記述の論理性も重視した。以下では，そのプロセスがわかる程度の略解を一つ示したが，異なる方針の解答もあり得る。また，具体的に解を求める問題では，解の表し方が以下とは異なる解答もあり得る。

[１](1) 固有値は 1（2 重根），-1。

(2) 行列 A の固有値 λ に対応する固有空間を $W(\lambda; A)$ とすると

$$W(1;A) = \left\{ s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, s,t \in \boldsymbol{R} \right\}, \quad W(-1;A) = \left\{ t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \boldsymbol{R} \right\}$$

(3) 対角化可能である。実際，

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる。

[２] (1) $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$, $\mathrm{Im}(f)$ の基底の 1 つは $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$。$\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$, $\mathrm{Ker}(f)$ の基底の 1 つは $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$。

(2) 例えば $g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$ とすればよい。

[３] (1) 平均値の定理から $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ となる c（$a < c < b$）がある。従って，

$$f'(a)(b-a) \leqq f'(c)(b-a) = f(b) - f(a) \leqq f'(b)(b-a)$$

(2) $F'_{a,b}(t) = f(b) - f(a) - f'((1-t)a + tb)(b-a)$，$F''_{a,b}(t) = -f''((1-t)a + tb)(b-a)^2$ である。f' が単調増加なので $F''_{a,b}(t) = -f''((1-t)a+tb)(b-a)^2 \leqq 0$ である。つまり，$F'_{a,b}$ は単調減少である。(1) より $F'_{a,b}(0) \geqq 0$，$F'_{a,b}(1) \leqq 0$，$F_{a,b}(0) = F_{a,b}(1) = 0$ である。以上のことを踏まえて，増減を調べることにより $F_{a,b}(t) \geqq 0$ $(t \in [0,1])$ となることがわかる。

[４] (1) 合成関数の微分の公式より

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta \frac{\partial z}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin\theta \frac{\partial z}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial z}{\partial y}$$

となる。これを用いて $\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$ を計算すると $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ となる。

(2) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とすると，D は $E = \{(r,\theta) \mid 0 \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta \leqq \pi\}$ と対応する。この変換のヤコビアンは r であるので

$$\iint_D y^2 e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \iint_E r^3 e^{-r^2}\sin^2\theta\,drd\theta = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e}\right)$$

となる。

[5] (1) f と g は $\boldsymbol{R}^3$ 上の等長変換なので，$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して

$$d(f\circ g(\mathbf{x}), f\circ g(\mathbf{y})) = d(f(g(\mathbf{x})), f(g(\mathbf{y}))) = d(g(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

が成立する。

(2)

$$\begin{aligned} d(f_1(\mathbf{x}), f_1(\mathbf{y})) &= d(\mathbf{x}+\mathbf{a}_1, \mathbf{y}+\mathbf{a}_1) \\ &= ((\mathbf{x}+\mathbf{a}_1) - (\mathbf{y}+\mathbf{a}_1), (\mathbf{x}+\mathbf{a}_1) - (\mathbf{y}+\mathbf{a}_1))^{1/2} \\ &= (\mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y})^{1/2} = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

であるので f_1 は等長変換である。他の場合は成分表示を行えばよい。

(3) 例えば，$f_2\circ f_3\circ f_1\circ f_1\circ f_3\circ f_2$ とすればよい。