解答 I 微分積分

問 1

(1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - x$ より，点 $(0,0,0)$ 及び，点 $(1,2,15)$ における接平面のの方程式はそれぞれ，$z = 0$ 及び，$z = 2x + 31y - 49$ となる。

(2) $y = 4x^3$ と $x = 4y^3$ より，$(x,y) = (0,0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

(3)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2,$$

より，極値の判別式は

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = (12x^2)(12y^2) - 1$$

で与えられる。$(x,y) = (0,0)$ における判別式は $D = -1 < 0$ より，$(0,0)$ では極大値も極小値もとらない。一方，$(x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ における判別式は $D = 8 > 0$ 及び $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 3 > 0$ より，$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ および $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ で極小値をとる。

問 2

(1) (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4}$.

(b) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{1 + a\cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$.

(2) (a) $p \geq 1$ のときは発散。$0 < p < 1$ のとき収束して，$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx = \frac{1}{1-p}$.

(b) $0 < q \leq 1$ のときは発散。$q > 1$ のとき収束して，$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^q}\, dx = \frac{1}{q-1}$.

(3) 区分求積法より，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{n}{(2n)^2}\right) = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\, dx = \frac{1}{2}.$$

解答 II 線形代数

問 1

(1) A の固有値は 1 のみで，その固有ベクトルは $\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，（$c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$）である。

(2) B の固有値を λ, その固有ベクトルを $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} c_i \mathbf{u}_i$ とする。$B\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ に代入し，条件式を用いると，

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + c_3(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) = \lambda \sum_{i=1}^{3} c_i \mathbf{u}_i,$$

となる。$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ が一次独立なので，$\mathbf{u}_i$ の係数を比較し，

$$A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

を得る。(1) の結果より，$\lambda = 1$ で，$c_1 \neq 0$, $c_2 = c_3 = 0$ となる。よって，B の固有値は 1，固有ベクトルは $c\mathbf{u}_1$（$c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$）である。

問 2

(1) $\mathrm{rank} A = 2$.

(2) $\mathrm{Im}(f)$ の基底の 1 つは，$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

(3) そのような B の 1 つは，$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

解答 III 力学

問 1 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

問 2 初期条件を満たす解は，以下のとおりである。

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t.$$

問 3 同様に

$$v(t) = -x_0 \omega_0 \sin \omega_0 t.$$

問 4 力学的エネルギーを E とする。$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_0^2$.

問 5 運動方程式は以下のとおりである。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - m\gamma\frac{dx}{dt}.$$

問 6 問題に与えられている一般解を運動方程式に代入すると以下のように求められる。

$$\lambda = \frac{\gamma}{2}, \qquad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}.$$

問 7 初期条件 $x(0) = x_0, v(0) = 0$ より，

$$A = \frac{x_0 \lambda}{\Omega}, \qquad B = x_0.$$

解答 IV 電磁気学

問 1 電場 $\boldsymbol{E}$ の大きさ E は以下のとおりである。

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(x-a)^2+y^2}.$$

問 2 電場 $\boldsymbol{E}$ の各成分は以下のとおりである。

$$E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x-a}{\{(x-a)^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}}, \quad E_y = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{\{(x-a)^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}}, \quad E_z = 0.$$

問 3 仕事は次のようになる。

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\{(x-a)^2+y^2\}^{\frac{1}{2}}}.$$

問 4 点 $\mathrm{P}(x,y,0)$ における電位 V は次のように求められる。

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\{(x-a)^2+y^2\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\{(x+a)^2+y^2\}^{\frac{1}{2}}}.$$

問 5 点 $\mathrm{P}(x,y,0)$ が原点から十分離れているとき，電位 V は,

$$\begin{aligned} V &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\frac{r}{\{(x-a)^2+y^2\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{r}{\{(x+a)^2+y^2\}^{\frac{1}{2}}}\right] \\ &\simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left\{\left(1+\frac{ax}{r^2}\right) - \left(1-\frac{ax}{r^2}\right)\right\} \\ &= \frac{2qax}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \end{aligned}$$

と表せる。よって，$p = 2qa$.

問 6 $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ より,

$$E_x = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2x^2-y^2}{r^5}, \quad E_y = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3xy}{r^5}, \quad E_z = 0.$$

解答 V プログラミング

以下に C 言語によるプログラム例を示す。

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

double func(double x) {
  return  x*x - 4.0*x + 1.0;
}

int main(void)
{
  double x1=0.0, x2=2.0, xm;
  double f1, fm;

  f1 = func(x1);

  while (1) {

    xm = (x1 + x2)/2.0;
    fm = func(xm);

    if (fabs(fm) <= 1.0e-5) {

      printf("x = %g\n", xm);
      break;

    } else {

      if (f1*fm > 0) {
        x1 = xm;
        f1 = fm;
      } else {
        x2 = xm;
      }

    }

  }

  return 0;
}
```