令和４年度

金沢大学理工学域編入学試験

数物科学類　数学コース

専門科目　数学

（注　意）

1　問題紙は指示のあるまで開かないこと。

2　問題紙は本文３ページであり，答案用紙は５枚，下書き用紙は２枚である。

3　答えはすべて答案用紙の指定のところに記入すること。下書き用紙への記入は答案として認めない。

4　答えは答案用紙の表面に記入すること。裏面の使用は認めない。

5　白紙の答案用紙も受験番号等を記入して提出すること。

6　問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

令和４年度　金沢大学理工学域　編入学試験 問 題 用 紙		
学類名	数物科学類（数学コース）（一般選抜）	
試験科目名	専門科目 数学	P.（1 ／ 3）

[1] 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ。

(1) A のすべての固有値を求めよ。

(2) A の各固有値に対する固有空間を求めよ。

(3) A が対角化可能の場合は $P^{-1}AP$ が対角行列になるような P を 1 つ求めよ。対角化可能ではない場合はその理由を述べよ。

[2] 次の問いに答えよ。

(1) 線形写像 $f\colon \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$ を $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4$ に対して

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

で定める。このとき，f の像 $\mathrm{Im}(f)$ の次元と 1 組の基底，および f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ の次元と 1 組の基底を求めよ。

(2) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ によって生成される $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間を W とする。線形写像 $g\colon \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^2$ であって，$\mathrm{Ker}(g) = W$ となるものを 1 つ求めよ。

[3] 関数 $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を C^2 級とし，導関数 f' は $\boldsymbol{R}$ 上で単調増加であるとする。次の問いに答えよ。

(1) $a, b \in \boldsymbol{R}$ $(a < b)$ に対して

$$f'(a)(b-a) \leqq f(b) - f(a) \leqq f'(b)(b-a)$$

を示せ。

(2) $a, b \in \boldsymbol{R}$ $(a < b)$ を固定する。関数 $F_{a,b}\colon [0,1] \to \boldsymbol{R}$ を

$$F_{a,b}(t) = (1-t)f(a) + tf(b) - f((1-t)a + tb)$$

と定めるとき

$$F_{a,b}(t) \geqq 0 \quad (t \in [0,1])$$

を示せ。

[4] 次の問いに答えよ。

(1) C^1 級関数 $z = f(x,y)$ に対して，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ とするとき

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 \quad (r \neq 0)$$

が成り立つことを示せ。

(2) 閉領域 $D = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 1, y \geqq 0\}$ に対して，重積分

$$\iint_D y^2 e^{-x^2-y^2}\,dxdy$$

の値を求めよ。

[5] (,) を $\boldsymbol{R}^3$ 上の標準内積とする。2 つのベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \boldsymbol{R}^3$ の間の距離 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y})^{1/2}$$

により定める。任意のベクトル $\mathbf{x}$，$\mathbf{y} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して，$d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を満たすような写像 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を $\boldsymbol{R}^3$ 上の等長変換とよぶ。次の問いに答えよ。

(1) $\boldsymbol{R}^3$ 上の 2 つの等長変換 f，g に対して，合成写像 $f \circ g$ も $\boldsymbol{R}^3$ 上の等長変換となることを示せ。

(2) ベクトル $\mathbf{a}_1 \in \boldsymbol{R}^3$ および行列 A_2, A_3 を

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とし，$\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への写像 f_1，f_2，f_3 を

$$f_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}_1, \quad f_2(\mathbf{x}) = A_2\mathbf{x}, \quad f_3(\mathbf{x}) = A_3\mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^3)$$

と定める。このとき f_1，f_2，f_3 は $\boldsymbol{R}^3$ 上の等長変換であることを示せ。

(3) ベクトル $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ をベクトル $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ にうつすような等長変換を，(2) の f_1，f_2，f_3 の合成を繰り返すことにより 1 つ与えよ。